Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Abr-Jul 2018

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (9 ptos.) Sean $L_1 = \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + z = 2 \end{cases}$,

$$L_2 : \ 4 - 2x = \frac{3-y}{2} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a. Halle el punto de intersección entre L_1 y L_2.

b. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta L, que pasa por el punto A y el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.

c. Halle la ecuación cartesiana del plano Π, que contiene a L_1 y a L_2.

Solución: El punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 debe satisfacer tanto las dos ecuaciones que determinan a L_1 como las tres ecuaciones que se desprenden de las ecuaciones simétricas dadas para L_2. La matriz aumentada de este sistema de cinco ecuaciones con tres incógnitas es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde se deduce que el sistema es inconsistente. Por lo tanto, las rectas L_1 y L_2 no se intersectan.

Para que el plano Π pueda contener las rectas L_1 y L_2, dado que no se intersectan, en necesario que sean paralelas. Como el vector director de la recta L_1 es $(-2, 1, 5)$ y el vector director de la recta L_2 es $(1, 4, 6)$, se tiene que no existe un plano que las contenga a ambas.

Pregunta 2. (9 ptos.) Sea

$$W = \left\{ A \in M_{2\times 2} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a+c & a-b \\ a+b+2c & b+c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

a. Demuestre que W es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

b. Encuentre una base y la dimensión de W.

Solución: Dado un vector cualquiera en W, notemos que se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} a+c & a-b \\ a+b+2c & b+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como W es generado por vectores en $M_{2\times 2}$ entonces W es un subespacio de $M_{2\times 2}$ (es no vacío porque contiene al vector cero, haciendo $a = b = c = 0$; tanto la suma de dos combinaciones lineales como la multiplicación por escalar de los tres vectores generadores es, nuevamente, una combinación lineal de ellos haciendo uso de las propiedades de distribución y asociatividad en $M_{2\times 2}$).
Como ya tenemos un conjunto generador para W, veamos si es linealmente independiente. Dados los escalares λ_1, λ_2 y λ_3, la ecuación

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equivale al sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que posee infinitas soluciones ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que estos tres vectores son linealmente dependientes. Sin embargo, como la matriz del sistema es equivalente por filas a una matriz escalonada cuyos pivotes están en las primeras dos columnas, los primeros dos vectores del conjunto generador constituyen un conjunto linealmente independiente que genera a W. Es decir, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para W y $\dim W = 2$.

Pregunta 3. (8 ptos.) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}$. ¿El vector $u = i + j - k$ pertenece al espacio columna de A? Halle el rango y la nulidad de A.

Solución: El vector u pertenece al espacio columna de A si, y sólo si, se puede expresar como combinación lineal de las columnas de A; es decir, si existe algún vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $Ax = u$. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -2 & -5 & 1\\ -1 & 4 & 0 & -1\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

entonces el vector u no pertenece al espacio columna de A. Como la matriz A es equivalente por filas a una matriz escalonada con dos pivotes, entonces el rango de A vale 2. Además, como la matriz A tiene tres columnas y el rango más la nulidad es igual al número de columnas, se tiene que la nulidad de A vale 1.

Pregunta 4. (3 ptos. c/u) Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

a. Si el ángulo formado por u y v es $\pi/2$, entonces

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

b. El conjunto de vectores en $\mathbb{P}_2$ dado por

$$S = \{1 + x,\ 1 - x^2,\ x^2 - x\}$$

es un conjunto linealmente independiente.

c. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$, diferentes de cero. Entonces los vectores $\mathrm{proy}_v u$ y $\mathrm{proy}_u v$ son ortogonales.

Solución:

a. Como el ángulo entre u y v es ${}^{\pi}\!/_{2}$, se tiene que $u \cdot v = 0$. Luego,

$$|u+v|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2\,u\cdot v + v\cdot v = |u|^2 + |v|^2$$

por lo que la proposición es verdadera.

b. Dados los escalares λ_1, λ_2 y λ_3, la ecuación

$$\lambda_1\left(1+x\right) + \lambda_2\left(1-x^2\right) + \lambda_3\left(x^2-x\right) = 0 + 0x + 0x^2$$

equivale al sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que como posee solución única trivial, se tiene que el conjunto S es linealmente independiente. Por lo tanto, la proposición es verdadera.

c. Como

$$(\mathrm{proy}_v u)\cdot(\mathrm{proy}_u v) = \left(\frac{v\cdot u}{|u|^2}\right) u \cdot \left(\frac{u\cdot v}{|v|^2}\right) v = \frac{(u\cdot v)^3}{|u|^2\,|v|^2}$$

basta considerar vectores u y v tales que $u \cdot v \neq 0$ para concluir que la proposición es falsa.